الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة الاستدراكية 2021
- عناصر الإجابة -

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | RR 24F

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

4h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	الشعبة أو المسلك

Exercice 1			Éléments de solutions	Barème
Partie I	1-	a)	f est continue sur I	0.25
		b)	f est strictement décroissante sur I	0.25
		c)	$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ .... $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ .... $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	0.25 0.25 0.25
		d)	La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale pour la courbe (C)... L'axe des abscisses est une direction asymptotique pour la courbe (C)...	0.25 0.25
		e)	Le tableau de variations de f.	0.25
	2-	a)	On a : $\forall x \in I \quad f''(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} (<0)$, donc la courbe (C) est concave.	0.25
		b)	La représentation graphique de la courbe (C).	0.25
	3-	a)	f est continue et strictement décroissante sur I donc f est une bijection de I vers $f(I) = \mathbb{R}$.	0.25
		b)	$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{-1}(x) = 1 - e^x$	0.25
		c)	Vérification.	0.25
Partie II	1-		On applique le théorème de la bijection à la fonction	0.5

		$x \mapsto P_n(x)-1$ sur l'intervalle $[0;1]$.	
2-		$P_2(x)=1 \Leftrightarrow x^2+2x-2=0$, on trouve $\alpha=\sqrt{3}-1$....... $0<\sqrt{3}-1<1$..	0.25 0.25
3-	a)	$P_{n+1}(x_n)=1+\dfrac{x_n^{n+1}}{n+1}$ (>1)	0.5
	b)	Pour $n \geq 2$, on a : $P_{n+1}(x_n)>1 \Rightarrow x_n > x_{n+1}$, donc la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.	0.5
	c)	La suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement positive (D'après II-1-), de plus elle est strictement décroissante donc majorée par son premier terme α.	0.25
	d)	la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.	0.25
4-	a)	$\forall x \in I \quad P_n'(x)=1+x+x^2+.....+x^{n-1}=\dfrac{1-x^n}{1-x}$ donc $\forall x \in I \quad f_n'(x)=\dfrac{-x^n}{1-x}$	0.5
	b)	$\forall x \in [0,\alpha];\forall n \geq 2 \quad \lvert f_n'(x)\rvert \leq \dfrac{\lvert x\rvert^n}{1-x} \leq \dfrac{\alpha^n}{1-x} \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$	0.25
	c)	On a : $\forall t \in [0,\alpha] \quad \lvert f_n'(t)\rvert \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$, donc pour $x \in [0,\alpha]$ on a d'après l'inégalité de la moyenne : $\left\lvert \int_0^x f_n'(t)dt \right\rvert \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}.x$. Or $x \leq \alpha < 1$ on obtient : $\lvert f_n(x)\rvert \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$ On peux aussi appliquer l'inégalité des accroissements finis	0.5

		d)	On a : $x_n \in [0,\alpha]$ donc $\lvert f_n(x_n)\rvert \le \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$ c'est à dire $\lvert f(x_n)+P_n(x_n)\rvert \le \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$ ou encore : $\lvert f(x_n)+1\rvert \le \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$	0.5
		e)	On utilise l'encadrement de la question II-4-d). On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha} = 0 \quad (0<\alpha<1)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = -1$. D'où : $\lim x_n = \lim f^{-1}(f(x_n)) = f^{-1}(-1) = 1-e^{-1}$ (f^{-1} est continue sur $\mathbb{R}$).	0.5

Exercice 2		Éléments de solutions	barème
1-	a)	F est positive sur $\mathbb{R}^+$ et négative sur $\mathbb{R}^-$.	0.5
	b)	F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x\in\mathbb{R} \quad F'(x) = e^{x-\frac{x^2}{2}}$.	0.5x2
2-	a)	Intégration par parties.	0.5
	b)	$\int_0^1 F(x)dx = \sqrt{e}-1$	0.5
3-	a)	Vérification.	0.5
	b)	On a : $\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}(n-k)F\left(\dfrac{k+1}{n}\right) = \sum\limits_{k=1}^{k=n}(n-k+1)F\left(\dfrac{k}{n}\right) = \sum\limits_{k=1}^{k=n}(n-k)F\left(\dfrac{k}{n}\right) + \sum\limits_{k=1}^{k=n}F\left(\dfrac{k}{n}\right)$ On en déduit le résultat : $u_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}F\left(\dfrac{k}{n}\right) - F(0) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}F\left(\dfrac{k}{n}\right)$	0.5
	c)	La suite $(u_n)_{n\ge1}$ est convergente....................................... $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 F(x)dx = \sqrt{e}-1$..	0.25 0.25

EXERCICE3		Indications de solutions	Barème
1-	a)	Vérification	0.5
	b)	$z_1 = m$ et $z_2 = -i$	0.5
	c)	Forme exponentielle de $z_1 + z_2$ dans le cas $m = e^{i\frac{\pi}{8}}$	0.75
2-	a)	L'affixe de M' est : $-\overline{m}$	0.5
	b)	L'affixe de N est $n = -\overline{m} + 2 + i$	0.75
	c)	L'équivalence	1

Exercice 4		Éléments de solutions	Barème
1-	a)	On a : p / A et $(a-1)A = a^7 - 1$ .... Déduction : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a^{7n} \equiv 1 \; [p]$......................	0.5 0.5
	b)	On applique le théorème de Bezout ou toute méthode juste........ Déduction : On utilise le théorème de Fermat	0.5 0.5
2-	a)	On a : $7 \nmid p-1$ donc $7 \wedge (p-1) = 1$ et on applique le théorème de Bezout	0.5
	b)	$a \equiv 1[p] \Rightarrow A \equiv 7[p] \quad \Rightarrow p/7 \quad \Rightarrow p = 7$	0.5
3-		p est un nombre premier impair tel que : p / A. On a deux cas : Si $7 / p-1$ alors $p \equiv 1 \; [7]$ Si $7 \nmid p-1$ alors $p = 7$	1